

**KEY FOR PHDMT (Entrance Test held dated on  
07.01.2024)**

Q. NO.	ANS.
1	3
2	1
3	2
4	1
5	1
6	3
7	2
8	1
9	2
10	4
11	4
12	3
13	2
14	4
15	1
16	3
17	3
18	1
19	2
20	3
21	3
22	2
23	1
24	2
25	1
26	3
27	4
28	3
29	1
30	1

Q. NO.	ANS.
31	3
32	3
33	2
34	4
35	1
36	2
37	3
38	2
39	1
40	4
41	1
42	2
43	3
44	3
45	1
46	2
47	1
48	2
49	3
50	1
51	3
52	2
53	4
54	1
55	3
56	2
57	4
58	3
59	2
60	1

Q. NO.	ANS.
61	3
62	4
63	1
64	3
65	2
66	2
67	3
68	4
69	1
70	3
71	1
72	3
73	3
74	1
75	3
76	2
77	4
78	1
79	4
80	4
81	2
82	4
83	2
84	3
85	2
86	1
87	2
88	4
89	3
90	3

Q. NO.	ANS.
91	3
92	1
93	2
94	4
95	2
96	1
97	3
98	4
99	2
100	2



*Prasad*  
24/01/24

**Ph. D. (Mathematics)  
Entrance Test, July, 2023**

*Time : 3 Hours*

*Maximum Marks : 100*

---

**GENERAL INSTRUCTIONS**

1. All questions are **compulsory**. Each question carries **1** mark.
2. No cell phones, calculators, books, slide-rules, notebooks or written notes, etc. will be allowed inside the examination hall.
3. You should follow the instructions given by the Centre Superintendent and by the Invigilator at the examination venue. If you violate the instructions, you will be disqualified.
4. Any candidate found copying or receiving or giving assistance in the examination will be disqualified.
5. The Question Booklet and the OMR Response Sheet (Answer Sheet) would be supplied to you by the Invigilators. After the examination is over, you should hand over the OMR Response Sheet and Question Booklet to the Invigilator before leaving the examination hall. Any candidate who does not return the OMR Response Sheet will be disqualified and the University may take further action against him/her.
6. All rough work is to be done on the question paper itself and not on any other paper. Scrap paper is not permitted. For arriving at answers you may work in the margins, make some markings or underline in the test booklet itself.
7. The University reserves the right to cancel the result of any candidate who impersonates or uses/adopts other malpractices or uses any unfair means. The University may also follow a procedure to verify the validity of scores of all examinees uniformly. If there is substantial indication that your performance is not genuine, the University may cancel your result.

## **How to fill up the information on the OMR Response Sheet (Examination Answer Sheet)**

1. Write your complete Enrolment No. in 10 digits. This should correspond to the enrolment number indicated by you on the OMR Response Sheet. Also write your correct name, address with pin code in the space provided. Put your signatures on the OMR Response Sheet with date. Ensure that the Invigilator in your examination hall also puts his signatures with date on the OMR Response Sheet at the space provided.
2. On the OMR Response Sheet student's particulars are to be filled in by blue/black ball pen also. Use blue/black ball pen for writing the Enrolment No. and Examination Centre Code as well as for blackening the circle bearing the correct answer number against the serial number of the question.
3. Do not make any stray remarks on this sheet.
4. Write correct information in numerical digits in Enrolment No. and Examination Centre Code Columns. The corresponding circle should be dark enough and should be filled in completely.
5. Each question is followed by four probable answers which are numbered (1), (2), (3) and (4). You should select and show only one answer to each question considered by you as the most appropriate or the correct answer. Select the most appropriate answer. Then by using blue/black ball pen, blacken the circle bearing the correct answer number against the serial number of the question.
6. No credit will be given if more than one answer is given for one question. Therefore, you should select the most appropriate answer.
7. You should not spend too much time on one question. If you find any particular question difficult, leave it and go to the next. If you have time left after answering all the questions, you may go back to the unanswered question.
8. There is no negative marking for wrong answers.

1. The binary operation  $*$  defined on  $\mathbf{N}$  by  $a * b = |a - b|$  :
  - (1) is associative
  - (2) does not have an identity element
  - (3) is commutative
  - (4) neither commutative nor associative
  
2. Let  $R$  be the ring  $\mathbf{Z}_{128}$ . Then,
  - (1) Every zero divisor of  $R$  is nilpotent.
  - (2)  $R$  has no zero divisors
  - (3)  $R$  has zero divisors, but no nilpotent elements
  - (4) There are elements of  $R$  which are neither zero divisors, nor units
  
3. If  $T : V \rightarrow V$  is a linear operator, where  $V$  is a vector space over a field  $F$ , and  $T(W) \subset W$  for all subspaces  $W$  of  $V$ , then :
  - (1) all the eigenvalues of  $T$  are one.
  - (2)  $T$  is given by  $T(v) = \lambda v$  for some  $\lambda \in F$
  - (3)  $T$  is the identity operator.
  - (4)  $T$  is the zero operator.
  
4. In the group  $S_7$ :
  - (1) there is an element of order 12.
  - (2) there is a normal subgroup of order five.
  - (3) every element of order three is a three-cycle
  - (4) there is no element of order ten
  
5. If  $R$  is a commutative ring with unity and  $R$  has a nonzero prime ideal which is not maximal, then:
  - (1)  $R$  is not a Principal ideal domain.
  - (2)  $R$  is not a Unique factorisation domain.
  - (3)  $R$  is not a Euclidean Domain, but could be a Principal ideal Domain
  - (4) no prime ideal of  $R$  is maximal.

6. If  $T : V \rightarrow W$  is an injective linear operator between finite dimensional vector spaces  $V$  and  $W$  of dimension at least two, then :

- (1)  $V$  and  $W$  have the same dimension.
- (2) the range of  $T$  is  $W$ .
- (3) there is a linear operator  $S : W \rightarrow V$  such that  $T \circ S$  is the identify operator on  $W$ .
- (4) the dimension of  $V$  is strictly less than the dimension of  $W$ .

7. If  $G$  is a finite group of order 42, then :

- (1)  $G$  has exactly seven Sylow-7 subgroups.
- (2)  $G$  has a unique Sylow-7 subgroups.
- (3)  $G$  has exactly 6 Sylow-7 subgroups.
- (4)  $G$  can have two, three or six Sylow-7 subgroups.

8. If  $R = \mathbf{Q} = [x]/I$  where  $I = \langle x^2 - 3x + 2 \rangle$ , then :

- (1)  $x - 3$  is a unit in  $R$ .
- (2)  $(x^2 + 5x + 1) + I$  and  $(8x - 1) + I$  are distinct elements of  $R$ .
- (3)  $R$  is a field.
- (4)  $R$  is an integral domain, but not a field.

9. There is a  $3 \times 3$  unitary matrix with :

$$(1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ as the first column.} \quad (2) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ as the first column}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ as the first column.} \quad (4) \begin{bmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ as its first two columns}$$



15. If  $\mathbf{P}_3$  is the vector space of polynomials of degree at most three over  $\mathbf{R}$  and  $T : \mathbf{P}_3 \rightarrow \mathbf{P}_3$  is the linear operator defined by

$$T(p(x)) = x^2 \frac{d^2}{dx^2}(p(x)) + x \frac{d}{dx}(p(x)) + p(x),$$

then :

- (1)  $T$  is diagonalisable
  - (2)  $T$  is not invertible
  - (3)  $T$  the characteristic polynomial is irreducible over  $\mathbf{R}$ .
  - (4) the characteristic polynomial and the minimal polynomial are the same.
16. In  $D_{90}$  the dihedral group of order 90, which of the following is **not** true ?
- (1) There is a unique subgroup of order nine.
  - (2) There is a unique subgroup of order five.
  - (3) There is a cyclic subgroup of order ten.
  - (4) There is a 45 elements of order two.
17. If  $F/K$  is a galois extension of number fields with galois group  $A_4$  :
- (1) there is a sub-extension  $L, K \subset L \subset F$ , such that  $[F : L] = 6$
  - (2) there is a sub-extension  $L, K \subsetneq L \subsetneq F$ , such that  $L$  is normal over  $K$
  - (3) there is a sub-extension  $L, K \subset L \subset F$  such that  $[F : L] = 3$
  - (4) there is a sub-extension  $L, K, \subset L \subset F$ , such that the galois group of  $F/L$  is cyclic of order four.
18. If  $A$  an  $n \times n$  matrix with real entries and  $\det(A) = 0$ , then which of the following is not true ?
- (1)  $A$  is diagonalisable.
  - (2) Zero is an eigenvalue of  $A$ .
  - (3)  $A$  is not injective.
  - (4) There is column vector  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  such that  $A \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

19. If  $\psi : \mathbf{Z}_{15} \rightarrow \mathbf{Z}_{21}$  is given  $\psi(g) = g^3$  :
- (1)  $\psi$  is injective.
  - (2) the image of  $\psi$  has five elements.
  - (3)  $\psi$  is surjective.
  - (4) the image of  $\psi$  has three elements.
20. If  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\alpha, \zeta)$ , where  $\zeta = e^{2\pi i/15}$  and  $\alpha = \sqrt[15]{5}$ , then there is an injective field homomorphism  $\sigma : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{C}$  such that :
- (1)  $\sigma(\alpha) = \alpha^2$
  - (2)  $\sigma(\zeta) = \zeta^3$
  - (3)  $\sigma(\zeta) = \zeta^2$
  - (4)  $\sigma(\zeta) = \alpha$
21. Which one of the following sets is uncountable ?
- (1)  $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$
  - (2)  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$
  - (3)  $[0, 1] / \left\{ \frac{2}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$
  - (4)  $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$
22. Which one of the following subsets of  $\mathbf{R}^2$  is compact ?
- (1)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 1\}$
  - (2)  $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \right\}$
  - (3)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
  - (4)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 5 < x^2 + y^2 < 6\}$
23. Let  $F_n = \left[ -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right]$  be intervals. Then  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  is :
- (1) a closed set
  - (2) an open set
  - (3) a null set
  - (4) a semi-open set
24. Let  $d_1, d_2$  and  $d_3$  be metrics on a set  $X$  with at least two elements. Which one of the following is not a metric on  $X$  ?
- (1)  $\min\{d_1, 2\}$
  - (2)  $\max\{d_2, 2\}$
  - (3)  $\frac{d_3}{1 + d_3}$
  - (4)  $\frac{d_1 + d_2 + d_3}{3}$



25. The series  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$  :

- (1) converges but not absolutely      (2) converges absolutely  
(3) diverges      (4) None of these

26. Let :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Then which one of the following is true ?

- (1)  $f(x, y)$  is discontinuous at  $(0, 0)$   
(2)  $f_x(0, 0) = 1$   
(3)  $f(x, y)$  is continuous at  $(0, 0)$   
(4)  $f_y(0, 0)$  does not exist

27. The outer measure of the set :

$$A: \{x^3 - 1 : 1 \leq x \leq 2\} \cup [4, 5]$$

is :

- (1) 2      (2) 5  
(3) 3      (4) 4

28. State which one of the following statements is true ?

- (1) Arbitrary union of compact sets is compact.  
(2) A subset of a set X which is open with respect to one metric on X will be open with respect to every other metric on X  
(3) If  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  in the function given by  $f(x) = x^2 + 4x + e^x$  and A is the interval  $(0, 5)$ , then  $f(A)$  is connected.  
(4) The domain of the Lebesgue outer measure is the power set of rationals

29. The stationary points of the function

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ given by } f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

is :

- (1) (0, 0) (2) (2, 2)  
(3) (1, 1) (4) (1, -1)

30. State which one of the following statements is **false** ?

- (1) If  $X$  is a normed linear space,  $x, y \in X$  and  $\|x\| = 1 = \|y\|$ , then  $\|x + y\| < 2$ .  
(2) The space  $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  is not reflexive  
(3) The linear operator  $A : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$ , given by  $A(z_1, z_2) = (z_1, -z_2)$  is a normal operator.  
(4) Every 1-dimensional Banach space is a Hilbert space.

31. Consider the function :

$$f(x) = |\cos x| + |\sin(2 - x)|$$

On which of the following sets,  $f$  is not differentiable ?

- (1)  $\{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$  (2)  $\left\{\frac{n\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\right\}$   
(3)  $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\right\}$  (4)  $\left\{\frac{n\pi}{2} + 4 : n \in \mathbf{Z}\right\}$

32. Which one of the following sets is not a connected subset of  $\mathbf{R}$  ?

- (1)  $[0, 4] \cup [3, 5]$   
(2)  $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ , the open ball with centre O and radius  $\frac{1}{2}$   
(3) The set of irrationals  
(4) The image of any connected set in  $\mathbf{R}^2$  under the function  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  given by  
 $f(x, y) = x^2 + y^2$

33.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} :$

- (1) in equal to (0, 0)
- (2) does not exist
- (3) is equal to (1, 1)
- (4) None of the above

34. If  $f(z)$  and  $g(z)$  are two non-zero polynomials, then  $f(z)\overline{g(z)}$  is analytic if and only if :

- (1)  $g\sqrt{g(z)}$  is constant
- (2)  $f(z)$  is constant
- (3)  $f(z)g(z)$  is constant
- (4)  $g(z)$  is constant

35. Which one of the following functions  $f$  are entire functions and have simple zero at  $z = ik$  for all  $k \in \mathbf{Z}$  :

- (1)  $f(z) = a \sin 2\pi iz$ , for some  $a \in \mathbf{C}$
- (2)  $f(z) = e^{bz}$ , for some  $b \in \mathbf{C}$
- (3)  $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$
- (4) None of the above

36. Let

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \text{ be given by } f(x, y) = (x + y, xy),$$

Then which one of the following is false ?

- (1)  $f$  is not surjective
- (2)  $f$  is not differentiable at (0, 0)
- (3) The innverse image of each point in  $\mathbf{R}^2$  under  $f$  has at most two elements.
- (4) The derivation of  $f$  is not invertible except on the set  $y = x$ .

37. The number  $\sqrt{3}e^{i\pi}$  is a/an :

- (1) imaginary number                      (2) rational number  
(3) irrational number                      (4) transcendental number

38. Let  $\{a_n\}$  and  $\{b_n\}$  be sequences of real number satisfying  $|a_n| \leq |b_n|$ . Then which one of the following is true ?

- (1)  $\sum a_n$  converges whenever  $\sum b_n$  converges  
(2)  $\sum a_n$  converges absolutely whenever  $\sum b_n$  converges absolutely  
(3)  $\sum b_n$  converges absolutely whenever  $\sum a_n$  converges absolutely  
(4)  $\sum b_n$  converges whenever  $\sum a_n$  converges

39. Let  $\{f_n\}$  be a sequence of integrable functions defined on an interval  $[a, b]$ . Then which one of the following is true ?

- (1) If  $f_n \rightarrow 0$  and  $f'_n$  are uniformly bounded, then  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0$   
(2) If  $f_n \rightarrow 0$  a. e., then  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0$   
(3) If  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0$ , then  $f_n(x) \rightarrow 0$   
(4) If  $f_n(x) \rightarrow 0$  and each  $f_n$  is bounded, then  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0$

40. Define  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  by :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{if } x < 0 \\ x^2 + 2x, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

Then which one of the following is false ?

- (1)  $f''(0)$  does not exist                      (2)  $f'(0)$  does not exist  
(3)  $f'(x)$  exists for each  $x \neq 0$                       (4)  $f''(x) = 2$  for all  $x \in \mathbf{R}$

41. The general solution of the differential equation  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = f(x), x \in (-\infty, \infty)$ , where  $f$  is a continuous real-valued function on  $(-\infty, \infty)$ , is (where A, B, C and  $k$  are arbitrary constants) :

$$(1) \quad y(x) = A \cos x + B \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$$

$$(2) \quad y(x) = \cos(x+k) + C \int_0^{x^\circ} f(t) \sin(x-t) dt$$

$$(3) \quad y(x) = A \cos x + B \sin x + \int_0^x f(x-t) \sin t dt$$

$$(4) \quad y(x) = A \cos x + B \sin x + \int_0^x f(x+t) \cos t dt$$

42. Consider the initial value problem (IVP)

$$\frac{dy}{dx} = y^2, y(0) = 1, (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

Then there exists a unique solution of IVP on :

$$(1) \quad (-\infty, \infty) \qquad (2) \quad (-\infty, 1)$$

$$(3) \quad (-2, 2) \qquad (4) \quad (-1, \infty)$$

43. Let V be the set of all bounded solutions of the ODE  $u''(t) - 4u'(t) + 3u(t) = 0$ ,  $t \in \mathbf{R}$ . Then V :

- (1) is a vector space of dimension 2.
- (2) is a vector space of dimension 1.
- (3) contains only the trivial function  $u \equiv 0$ .
- (4) contains exactly two functions.

44. The second order PDE  $u_{yy} - yu_{xx} + x^3u = 0$  is :

- (1) elliptic for all  $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ .
- (2) parabolic for all  $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$ .
- (3) elliptic for all  $x \in \mathbf{R}, y < 0$ .
- (4) hyperbolic for all  $x \in \mathbf{R}, y < 0$ .

45. The family of surfaces given by  $u = xy + f(x^2 - y^2)$ , where  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  is a differentiable function, satisfies :

- (1)  $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$
- (2)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$
- (3)  $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2$
- (4)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2$

46. Let  $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  be differentiable and satisfy the ODE :

$$\frac{dy}{dx} = f(y), x \in \mathbf{R}, y(0) = y(1) = 0$$

where  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  is a Lipschitz continuous function.

Then :

- (1)  $y(x) = 0$  if and only if  $x \in \{0,1\}$
- (2)  $y$  is bounded
- (3)  $y$  is strictly increasing
- (4)  $\frac{dy}{dx}$  is unbounded

47. Let  $u(x,t) = e^{iwx}v(t)$  with  $v(0) = 1$  be a solution to  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ .

Then :

- (1)  $u(x,t) = e^{iw(x-w^2t)}$
- (2)  $u(x,t) = e^{iwx(x-w^2t)}$
- (3)  $u(x,t) = e^{iw(x+w^2t)}$
- (4)  $u(x,t) = e^{iw^3(x-t)}$

48. The Charpit's equations for the PDE

$$up^2 + q^2 + x + y = 0, \quad P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

are given by :

$$(1) \quad \frac{dx}{-1-p^3} = \frac{dy}{-1-qp^2} = \frac{du}{2P^2u+2q^2} = \frac{dp}{2pu} = \frac{dq}{2q}$$

$$(2) \quad \frac{dx}{2pu} = \frac{dy}{2q} = \frac{du}{2p_u^2+2q^2} = \frac{dp}{-1-p^3} = \frac{dq}{-1-qp^2}$$

$$(3) \quad \frac{dx}{up^2} = \frac{dy}{q^2} = \frac{du}{0} = \frac{dp}{x} = \frac{dq}{y}$$

$$(4) \quad \frac{dx}{2q} = \frac{dy}{2pu} = \frac{du}{x+y} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{4p^2}$$

49. Consider the system of ODE in  $\mathbf{R}^2$ ,  $\frac{dy}{dt} = AY$ ,  $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $t > 0$  where  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

and  $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ , then :

(1)  $y_1(t)$  and  $y_2(t)$  are monotonically increasing for  $t > 0$

(2)  $y_1(t)$  and  $y_2(t)$  are monotonically increasing for  $t > 1$ .

(3)  $y_1(t)$  and  $y_2(t)$  are monotonically decreasing for  $t > 1$ .

(4)  $y_1(t)$  and  $y_2(t)$  are monotonically decreasing for  $t > 0$ .

50. Consider the ODE on  $\mathbf{R}$   $y'(x) = f(y(x))$ . If  $f$  is an even function and  $y$  is an odd function, then :

(1)  $-y(-x)$  is also a solution.

(2)  $y(-x)$  is also a solution

(3)  $-y(x)$  is also a solution

(4)  $y(x)y(-x)$  is also a solution

51. A large tank filled with water is to be emptied by removing half of the water present in it everyday. After how many days will there be closest to 10% water left in the tank ?
- (1) One (2) Two  
(3) Three (4) Four
52. What is the angle between the minute and hour hands of a clock at 7 : 35 ?
- (1)  $10^\circ$  (2)  $17.5^\circ$   
(3)  $19.5^\circ$  (4)  $21^\circ$
53. Suppose you expand the product  $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\dots\dots(x_{10} + y_{10})$ . How many terms will have only one  $x$  and rest  $y$ 's ?
- (1) 0 (2) 1  
(3) 5 (4) 10
54. If  $n$  is a natural number and  $n^5$  is odd, which of the following is true ?
- (1)  $n$  is odd (2)  $n+1$  is odd  
(3)  $n^2$  is even (4)  $n^4$  is even
55. A lucky man finds 6 pots of gold coins. He counts the coins in the first four pots to be 60, 30, 20 and 15, respectively. If there is a definite progression, what would be the numbers of coins in the next two pots ?
- (1) 4 and 2 (2) 10 and 5  
(3) 12 and 10 (4) 14 and 8
56. A 15 m long wooden log has a uniform diameter of 2 m. To what length the log should be cut to obtain a piece of  $11 \text{ m}^3$  volume ?
- (1) 2.5 m (2) 3.5 m  
(3) 7 m (4) 14 m



57. In solving a quadratic equation of the form  $x^2 + ax + b = 0$ , one student took wrong value of  $a$  and got the roots as 6 and 2; while another student took the wrong value of  $b$  and got the roots as 6 and 1. What are the correct values of  $a$  and  $b$ , respectively ?

- (1) 6 and 7
- (2) 6 and 12
- (3) 7 and - 12
- (4) - 7 and 12

58. We define a function  $f(N) = \text{sum of digits of } N$ , express as decimal number e. g.  $f(125) = 1 + 2 + 5 = 8$ . Evaluate  $f(2^7 3^3 5^6)$ .

- (1) 7
- (2) 8
- (3) 9
- (4) 10

59. The sum of first  $n$  natural numbers with one of them missed is 42. What is the number that was missed ?

- (1) 2
- (2) 3
- (3) 4
- (4) 5

60. What is the next term in the following sequence ?

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, .....

- (1) 31
- (2) 33
- (3) 35
- (4) 37

61. If the series 3, 4, 7, 12, 13, 16, 21, ..... is continued, then which of the following numbers will not be the term of series ?

- (1) 25
- (2) 30
- (3) 32
- (4) 39

62. The decimal equivalent of the binary number 111001 is :

- (1) 51
- (2) 53
- (3) 55
- (4) 57

63. Generalisation of conclusion through specific examples is :

- (1) inductive approach
- (2) deductive approach
- (3) theoretical approach
- (4) scientific approach

64. If the fourth Saturday of a month is the 22nd day, then what day is the 13th day of the month ?

- (1) Tuesday
- (2) Wednesday
- (3) Thursday
- (4) Friday

65. Find the missing numbers in the following series :

1, 1, 4, 8, 9, 27, 16, ?

- (1) 32
- (2) 64
- (3) 81
- (4) 256

66. Find the next pair in the sequence C – 3, E – 6, G – 2, I – 24, K – 48, .....

- (1) S-48
- (2) M-96
- (3) L-96
- (4) D-48

67. COLD : FSQJ :: HEAT : ?

- (1) XJFY
- (2) KIGZ
- (3) KIFZ
- (4) YIGY

68. Find the odd number pair :

- (1) 1 : 2
- (2) 2 : 9
- (3) 3 : 28
- (4) 4 : 64

69. Read the following and answer the question given below :

- (I) Point B is 4 m towards the north of point A.
- (II) Point E is 8 m towards the east of point B.
- (III) Point C is 5 m towards the east of point A.
- (IV) Point D is 9 m towards the west of point C

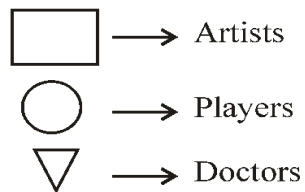
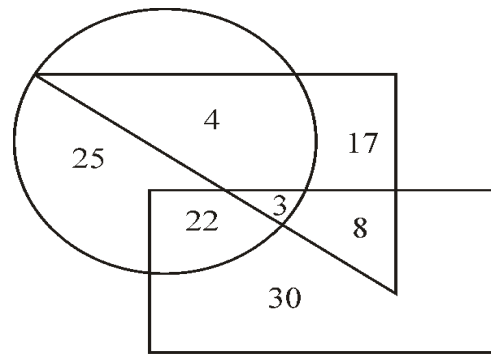
How far should one walk from point A in order to reach point D ?

- (1) 4 m
- (2) 9 m
- (3) 5 m
- (4) 14 m

70. How many numbers are there between 1 and 100 that are not divisible by 3 and 5 ?

- (1) 47
- (2) 43
- (3) 53
- (4) 58

**Question 71-75 :** Study the diagram given below and answer each of the following questions :



71. How many doctors are neither artists nor players ?

- (1) 17
- (2) 5
- (3) 10
- (4) 30

72. How many doctors are both players and artists ?

- (1) 22 (2) 8  
(3) 3 (4) 30

73. How many artists are players ?

- (1) 5 (2) 8  
(3) 25 (4) 16

74. How many players are neither artists nor doctors ?

- (1) 25 (2) 17  
(3) 5 (4) 10

75. How many artists are neither players nor doctors ?

- (1) 10 (2) 17  
(3) 30 (4) 15

76.  $x^{451} + y^{451}$  is always divisible by :

- (1)  $x - y$  (2)  $x + y$   
(3)  $x^2 + y^2$  (4) None of these

77. The remainder when  $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 20!$  is divided by 6.

- (1) 0 (2) 1  
(3) 2 (4) 3

78. Two dice are tossed. The probability that the total score is a prime number is :

- (1)  $\frac{5}{12}$  (2)  $\frac{1}{6}$   
(3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{7}{9}$

79. Let  $P(n)$  denote the statement " $n^2 + n$  is odd." Also,  $P(n) = P(n+1)$ , then  $p(n)$  is true for all :

- (1)  $n > 1$  (2)  $n$   
(3)  $n > 2$  (4) None of these

80. The greatest positive integer, which divides

$$(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$$

for all  $n \in \mathbf{N}$  is :

- (1) 6 (2) 24  
(3) 60 (4) 120

81. Which of the following statements is logically equivalent to :

$$(p \wedge q) \rightarrow \sim r$$

- (1)  $(p \wedge q) \vee \sim r$  (2)  $\sim(p \wedge q \wedge r)$   
(3)  $\sim r \rightarrow (p \wedge q)$  (4)  $\sim(p \wedge q) \vee r$

82. Which of the following statements is a tautology ?

- (1)  $(p \rightarrow q) \rightarrow p$  (2)  $(p \wedge q) \rightarrow \sim q$   
(3)  $p \rightarrow \sim(p \wedge q)$  (4)  $p \vee q \rightarrow q$

83. The symbolic form of the statement “Between every two real numbers there exists a rational number.” is :

- (1)  $\forall p \in \mathbf{R}, \forall q \in \mathbf{R} \exists r \in \mathbf{Q}$  s. t.  $p < r < q$   
(2)  $\forall p, q \in \mathbf{R}, p < q \exists r \in \mathbf{Q}$  s. t.  $p < r < q$   
(3)  $\forall r \in \mathbf{Q} \exists p, q \in \mathbf{R}$  s. t.  $p < r < q$   
(4)  $\exists p, q, r \in \mathbf{R}$  s. t.  $p < q < r$

84. Consider the following proof of the statement “ $m, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow m^2 - n^2 \neq 1$ ” :

Proof : Suppose  $m^2 - n^2 = 1$ . Then  $(m-n)(m+n) = 1$ . This implies  $m-n = m+n$ , and hence  $n = 0$ . This is not possible therefore,  $m^2 - n^2 \neq 1$ . The proof given above is an example of :

- (1) Proof by induction (2) Proof by counterexample  
(3) Proof by contradiction (4) Direct proof

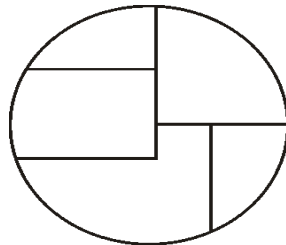
85. Which of the following statements is true ?

- (1)  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 > x$                       (2)  $\exists x \in \mathbf{R}$  s. t.  $x^2 - 2 = 1$   
 (3)  $\exists x \in \mathbf{R}$  s. t.  $x^2 + 2 = 1$               (4)  $\exists x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R}$  s. t.  $x^2 + y^2 = 4$

86. Which of the following is a counterexample to the statement : “If  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  is an increasing sequence of real numbers, then some  $a_n$  must be positive.” ?

- (1)  $\left(-\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbf{N}}$                       (2)  $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$   
 (3)  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$                       (4)  $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$

87. How many colours are needed, at the least, to colour the regions of the following circle so that no two regions sharing a boundary get the same colour ?



- (1) 2    (2) 3  
 (3) 4    (4) 5

88. Consider the statements :

A = the set of all good citizens

B = the set of all charitable people

C = the set of all polite people

Then which of the following relations represents the statement : “Everyone who is charitable and polite is a good citizen.” ?

- (1)  $A \subseteq B \cap C$                       (2)  $A \setminus B \supseteq C$   
 (3)  $B \cup C \supseteq A$                       (4)  $B \cap C \subseteq A$

89. Assuming the functions are defined from  $\mathbf{R}$  to  $\mathbf{Z}$ , which of the following is not onto ?

(1)  $f(x) = \lfloor x \rfloor$                                       (2)  $f(x) = x + 1$

(3)  $f(x) = x^2 + 1$                                       (4)  $f(x) = |x|$

90. Which of the following statements cannot be proved by the principle of induction ?

(1) The sum of all the interior angles of a convex  $n$ -gon is  $180^\circ (n - 2)$

(2)  $\forall x, y \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, x^n \cdot y^n = (xy)^n$

(3) Every subset of  $\mathbf{N}$  is countable.

(4) The cardinality of the power set of a set with  $n$  elements is  $2^n$ .

91. Consider the statement :

“In a group of 36 people, there are always 6 people whose birthdays fall on the same day of the week.”

Which of the following methods can be used to prove it ?

(1) Contradiction                                      (2) Pigeonhole principle

(3) Both (1) and (2)                                      (4) None of these

92. 100 people were surveyed on their interest in movies. It was found that 20 people liked thrillers, 48 romantic and 32 comedy movies. Further, 15 people liked thrillers and romantic both, 10 people liked romantic and comedy, and 8 people liked comedy and thrillers both. It was also found that 15 people liked none of the three movie genres. How many people liked all of the three genres ?

(1) 18    (2) 15

(3) 28    (4) 12

93. Let A, B and C be three persons. A says that B is a liar. B says that C is a liar. C says that both A and B are liars. Who is speaking the truth ?

(1) A    (2) B

(3) C    (4) None of these

94. A committee of 5 members is to be formed from 5 men and 6 women. In how many ways can the committee be formed, if it has 2 men and 3 women ?

- (1) 120
- (2) 180
- (3) 30
- (4) 200

95. What is the weighted mean of the following data ?

$x$	weights
2	1
5	2
3	4
4	3
2	6
8	2

- (1) 4
- (2) 3.56
- (3) 10.67
- (4) 5.8

96. The mean of 12 numbers is 48. Removing one of the numbers causes the mean to decrease to 45. What number was removed ?

- (1) 81
- (2) 53
- (3) 28
- (4) 76

97. If the mean of a set of numbers is 5 and their standard deviation is 6, what is the mean of the squares of those numbers ?

- (1) 13
- (2) 17
- (3) 61
- (4) Cannot be determined



98. Consider a mathematical statement :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s. t. } |x - y| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

What is the negation of this statement ?

- (1)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s. t. } |x - y| \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$
- (2)  $\nexists \varepsilon > 0, \delta > 0 \text{ s. t. } |x - y| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$
- (3)  $\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s. t. } |x - y| \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$
- (4)  $\exists \varepsilon > 0 \text{ s. t. } \forall \delta > 0 \exists x, y \in \mathbf{R}, |x - y| \geq \varepsilon$

99. Let S be the set of all nonzero real numbers, and \* is defined on S as  $x * y = x + y + 1$  for all  $x, y \in S$ . Now consider the following statements :

I : S is closed under \*

II : There exists an  $x \in S$  s. t.  $x * y = y$  for all  $y \in S$ .

Which of the above statements is true ?

- (1) Only I
- (2) Only II
- (3) Both I and II
- (4) None of these

100. Which of the following sets cannot be expressed as the cartesian product of two sets ?

- (1)  $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4\}$
- (2)  $\{(x, y) \mid x > y\}$
- (3)  $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{Q}, y \notin \mathbf{Q}\}$
- (4)  $\{(x, y) \mid x \text{ is even integer, } y = 2x\}$

पी-एच. डी. (गणित)  
प्रवेश परीक्षा, जुलाई, 2023

समय: 3 घण्टे

अधिकतम अंक: 100

सामान्य निर्देश

1. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।
2. परीक्षा कक्ष के अंदर सेलफोन, कैलकुलेटर्स, पुस्तकें, स्लाइड-रूल्स, नोटबुकस या लिखित नोट्स, इत्यादि ले जाने की अनुमति नहीं है।
3. आपको परीक्षा स्थल पर केंद्र व्यवस्थापक व निरीक्षक के द्वारा दिए गये निर्देशों का अनुपालन करना होगा। ऐसा न करने पर आपको अयोग्य घोषित किया जाएगा।
4. कोई परीक्षार्थी नकल करते या कराते हुए पकड़ा जाता है तो उसे अयोग्य घोषित कर दिया जाएगा।
5. आपको निरीक्षक द्वारा प्रश्न-पुस्तिका तथा ओ. एम. आर. उत्तर पत्रक प्रदान किया जाएगा। परीक्षा समाप्त हो जाने के पश्चात्, परीक्षा कक्ष छोड़ने से पहले ओ. एम. आर. उत्तर पत्रक तथा प्रश्न-पुस्तिका को निरीक्षक को सौंप दें। किसी परीक्षार्थी द्वारा ऐसा न करने पर उसे अयोग्य घोषित कर दिया जाएगा तथा विश्वविद्यालय उसके खिलाफ आगे कार्यवाही कर सकता है।
6. सभी रफ कार्य प्रश्नपत्र पर ही करना है, किसी अन्य कागज पर नहीं। स्क्रेप पेपर की अनुमति नहीं है। उत्तर देते समय आप उत्तर-पुस्तिका में ही हाशिये का प्रयोग कर सकते हैं, कुछ निशान लगा सकते हैं या रेखांकित कर सकते हैं।
7. विश्वविद्यालय को यह अधिकार है कि किसी परीक्षार्थी द्वारा अनुचित व्यवहार या अनुचित साधनों का प्रयोग करने पर उसके परिणाम को रद्द कर दे। विश्वविद्यालय को भी चाहिए कि वह सभी परीक्षार्थियों के अंकों की जाँच एकसमान रूप से करे। यदि कहीं से ऐसा दिखाई देता है कि आपका निष्पादन उचित नहीं है, तो विश्वविद्यालय आपके परिणाम रद्द कर सकता है।

## ओ. एम. आर. उत्तर-पत्रक एवं परीक्षा उत्तर-पत्रक पर सूचना कैसे भरें ?

1. 10 अंकों में अपना पूर्ण अनुक्रमांक लिखें। यह अनुक्रमांक ओ. एम. आर. उत्तर पत्रक पर आपके द्वारा डाले गए अनुक्रमांक से मिलना चाहिए। दिए गए स्थान में अपना सही नाम, पता भी पिन कोड सहित लिखें। ओ. एम. आर. उत्तर पत्रक पर तिथि सहित अपने हस्ताक्षर करें। यह सुनिश्चित कर लें कि आपके परीक्षा कक्ष में निरीक्षक ने भी दी गई जगह पर तिथि सहित ओ. एम. आर. उत्तर पत्रक पर हस्ताक्षर कर दिए हैं।
2. ओ. एम. आर. उत्तर पत्रक पर परीक्षार्थी का विवरण नीले/काले बाल पेन द्वारा भरा जाना चाहिए। अनुक्रमांक व परीक्षा केंद्र कूट लिखने व साथ ही प्रश्न के क्रमांक के सामने सही उत्तर-संख्या वाले गोले को काला करने के लिए भी नीले/काले बाल पेन का प्रयोग करें।
3. इस पत्रक पर कोई अवांछित निशान न लगायें।
4. अनुक्रमांक तथा परीक्षा केंद्र कूट स्तंभ में सही सूचना अंकों में लिखें। संगत गोले को पूर्णतः गहरा करें तथा पूर्ण रूप से भरें।
5. प्रत्येक प्रश्न के चार संभावित उत्तर हैं जिन्हें (1), (2), (3) व (4) द्वारा दर्शाया गया है। आपको इनमें से सर्वाधिक उचित उत्तर को चुनकर दर्शाना है। सर्वाधिक उचित उत्तर को चुनकर नीले/काले बाल पेन से प्रश्न के क्रमांक के सामने सही उत्तर वाले गोले को काला करें।
6. एक से अधिक उत्तर होने पर कोई अंक नहीं मिलेगा। इसलिए सर्वाधिक उचित उत्तर को ही चुनें।
7. एक प्रश्न पर अधिक समय मत खर्च कीजिए। यदि आपको कोई प्रश्न कठिन लग रहा हो, तो उसे छोड़कर अगले प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए। बाद में समय बचने पर उस छोड़े हुए प्रश्न का उत्तर दे सकते हैं।
8. गलत उत्तरों हेतु कोई ऋणात्मक अंकन नहीं होगा।

1.  $\mathbf{N}$  पर  $a*b = |a-b|$  द्वारा परिभाषित द्विआधारी संक्रिया :
  - (1) सहचारी है।
  - (2) का कोई तत्समक अवयव नहीं है।
  - (3) क्रमविनिमेय है।
  - (4) न तो क्रमविनिमेय है और न ही सहचारी है।
  
2. मान लीजिए कि  $R$  वलय  $\mathbf{Z}_{128}$  है। तब,
  - (1)  $R$  का प्रत्येक शून्य भाजक शून्यभावी है।
  - (2)  $R$  के कोई शून्य भाजक नहीं है।
  - (3)  $R$  के शून्य भाजक हैं, परन्तु इनमें कोई शून्यभावी अवयव नहीं है।
  - (4)  $R$  के ऐसे अवयव हैं, जो न तो शून्य भाजक हैं और न ही इकाइयाँ हैं।
  
3. यदि  $T:V \rightarrow V$  एक रैखिक संकारक है, जहाँ  $V$  एक क्षेत्र  $F$  पर एक सदिश समष्टि है, तथा  $V$  की सभी उपसमष्टियों  $W$  के लिए,  $T(W) \subset W$  है, तो :
  - (1)  $T$  के सभी आइगनमान 1 हैं।
  - (2) किसी  $\lambda \in F$  के लिए,  $T$  को  $T(v) = \lambda v$  द्वारा दिया जाता है।
  - (3)  $T$  तत्समक संकारक है।
  - (4)  $T$  शून्य संकारक है।
  
4. समूह  $S_7$  में,
  - (1) कोटि 12 का एक अवयव है।
  - (2) कोटि पाँच का एक प्रसामान्य उपसमूह है।
  - (3) कोटि तीन का प्रत्येक अवयव तीन-चक्रोय है।
  - (4) कोटि दस का कोई अवयव नहीं है।

5. यदि  $R$  एक क्रमविनिमेय तत्समकी वलय है तथा  $R$  की शून्येतर अभाज्य गुणजावली है, जो उच्चिष्ठ नहीं है, तो :
- (1)  $R$  एक मुख्य गुणजावली प्रान्त नहीं है।
  - (2)  $R$  एक अद्वितीय गुणनखंडन प्रान्त नहीं है।
  - (3)  $R$  एक यूक्लिडीज प्रान्त नहीं है, परन्तु एक मुख्य गुणजावली प्रान्त हो सकता है।
  - (4)  $R$  की कोई भी अभाज्य गुणजावली उच्चिष्ठ नहीं है।
6. यदि  $T: V \rightarrow W$  न्यूनतम दो विमाओं की परिमित विमोय सदिश समष्टियों  $V$  और  $W$  के बीच एक एकैकी रैखिक संकारक है, तो :
- (1)  $V$  और  $W$  की समान विमाएँ हैं।
  - (2)  $T$  का परिसर  $W$  है।
  - (3) एक रैखिक संकारक  $S: W \rightarrow V$  है, ताकि  $W$  पर  $ToS$  तत्समक संकारक है।
  - (4)  $V$  की विमा  $W$  की विमा से कम है।
7. यदि  $G$  ऑर्डर 42 का एक परिमित समूह है, तो :
- (1)  $G$  का ठीक सात सीलो-7 उपसमूह हैं।
  - (2)  $G$  का एक अद्वितीय सीलो-7 उपसमूह हैं।
  - (3)  $G$  के ठीक 6 सीलो-7 उपसमूह हैं।
  - (4)  $G$  के दो, तीन या 6 सीलो-7 उपसमूह हो सकते हैं।
8. यदि  $R = \mathbf{Q} = [x]/I$  है, जहाँ  $I = \langle x^2 - 3x + 2 \rangle$  है, तो :
- (1)  $R$  में  $x-3$  एक इकाई है।
  - (2)  $(x^2 + 5x + 1) + I$  और  $(8x - 1) + I$ ,  $R$  के भिन्न-भिन्न अवयव हैं।
  - (3)  $R$  एक क्षेत्र है।
  - (4)  $R$  एक पूर्णाकीय प्रान्त है, परन्तु एक क्षेत्र नहीं है।

9. एक  $3 \times 3$  ऐकिक आव्यूह है, जिसका/जिसके :

$$(1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ प्रथम स्तंभ है।} \qquad (2) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ प्रथम स्तंभ है।}$$

$$(3) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ प्रथम स्तंभ है।} \qquad (4) \begin{bmatrix} i \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ और } \begin{bmatrix} -i \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ प्रथम दो स्तंभ हैं।}$$

10. कोटि 6 का एक समूह है, जिसके संयुग्मन वर्गों का गणनांक निम्न है :

- (1) 1, 1 और 4                      (2) 1 और 5  
(3) 2, 2 और 3                      (4) 1, 2 और 3

11. यदि  $R_1 = \mathbf{Z}$  और  $R_2 = \mathbf{Z}[x]/\langle x^2 \rangle$  है, तो :

- (1)  $R_1$  और  $R_2$  तुल्यकारी पूर्णाकीय प्रान्त हैं।  
(2)  $R_1$  और  $R_2$  पूर्णाकीय प्रान्त हैं; परन्तु तुल्यकारी नहीं हैं।  
(3)  $R_2$  से  $R_1$  तक एक एकैकी समाकारिता है।  
(4)  $R_1$  से  $R_2$  तक एक एकैकी समाकारिता है।

12. यदि A और B दो समरूप  $n \times n$  आव्यूह हैं, तो निम्न में से कौन-सा कथन सत्य नहीं है ?

- (1) A और B के समान आइगनमान हैं।  
(2)  $\det(A) = \det(B)$  है।  
(3) यदि A एक विकर्ण आव्यूह है, तो B भी एक विकर्ण आव्यूह होगा।  
(4) A और B की समान जाति (रैंक) है।

13. निम्नलिखित आबेली समूहों के युग्मों में से कौन-सा युग्म तुल्यकारी नहीं है ?
- (1)  $Z_6 \times Z_5 \times Z_2$  और  $Z_{10} \times Z_3 \times Z_2$ .
  - (2)  $Z_4 \times Z_3 \times Z_2$  और  $Z_8 \times Z_3$
  - (3)  $Z_{14} \times Z_{35}$  और  $Z_7 \times Z_7 \times Z_5 \times Z_2$
  - (4)  $Z_{30} \times Z_{14}$  और  $Z_{15} \times Z_7 \times Z_4$
14. वलय  $Z[i]$  में, निम्न में से कौन-सा कथन सत्य नहीं है ?
- (1)  $1+i$  एक अभाज्य अवयव है।
  - (2)  $1+i$  और  $1-i$  सहयोगी हैं।
  - (3)  $\frac{Z[i]}{\langle 1+i \rangle}$  एक परिमित वलय है।
  - (4)  $\frac{Z[i]}{\langle 1+i \rangle}$  के शून्य भाजक हैं।
15. यदि  $R$  पर  $P_3$  अधिकतम तीन घात के बहुपदों की सदिश समष्टि है तथा  $T: P_3 \rightarrow P_3$  रैखिक संकारक है, जो  $T(p(x)) = x^2 \frac{d^2}{dx^2}(p(x)) + x \frac{d}{dx}(p(x)) + p(x)$  द्वारा परिभाषित है, तो :
- (1)  $T$  विकर्णनीय है।
  - (2)  $T$  व्युक्रमणीय नहीं है।
  - (3)  $R$  पर  $T$  जो अभिलक्षणिक बहुपद है, अखंडनीय है।
  - (4) अभिलक्षणिक बहुपद और अल्पिष्ठ बहुपद समान हैं।
16. कोटि 90 के डायहेड्रल समूह  $D_{90}$  में, निम्न में से कौन-सा कथन सत्य नहीं है ?
- (1) इनमें कोटि 9 का एक अद्वितीय उपसमूह है।
  - (2) इसमें कोटि पाँच का एक अद्वितीय उपसमूह है।
  - (3) इसमें कोटि दस का एक चक्रोय उपसमूह है।
  - (4) इसमें कोटि दो के 45 अवयव हैं।
17. यदि  $F/K$  गैलोइस समूह  $A_4$  के साथ संख्या क्षेत्रों का एक गैलोइस विस्तार है, तो :
- (1) एक उपविस्तार  $L, K \subset L \subset F$  है, ताकि  $[F:L]=6$  है।
  - (2) एक उपविस्तार  $L, K \subsetneq L \subsetneq F$ , है, ताकि  $K$  पर  $L$  प्रसामान्य है।
  - (3) एक उपविस्तार  $L, K \subset L \subset F$  है, ताकि  $[F:L]=3$  है।
  - (4) एक उपविस्तार  $L, K \subset L \subset F$  है, ताकि  $F/L$  का गैलोइस समूह कोटि चार का चक्रोय है।

18. यदि  $A$  वास्तविक प्रविष्टियों और  $\det(A)=0$  वाला एक  $n \times n$  आव्यूह है, तो निम्न में से कौन-सा कथन सत्य नहीं है ?

- (1)  $A$  विकर्णनीय है।  
 (2) शून्य  $A$  का एक आइगनमान है।  
 (3)  $A$  एकैकी नहीं है।

(4) एक स्तम्भ सदिश  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  है, ताकि  $A \mathbf{a} = \mathbf{0}$  है।

19. यदि  $\psi : \mathbf{Z}_{15} \rightarrow \mathbf{Z}_{21}$  को  $\psi(g) = g^3$  द्वारा दिया जाता है, तो :

- (1)  $\psi$  एकैकी है। (2)  $\psi$  के प्रतिबिंब में पाँच अवयव हैं।  
 (3)  $\psi$  आच्छादक है। (4)  $\psi$  के प्रतिबिंब में तीन अवयव हैं।

20. यदि  $K = \mathbf{Q}(\alpha, \zeta)$  है, जहाँ  $\zeta = e^{2\pi i/15}$  है और  $\alpha = \sqrt[15]{5}$  है, तो एक एकैकी क्षेत्र समाकारिता है ताकि :

- (1)  $\sigma(\alpha) = \alpha^2$  (2)  $\sigma(\zeta) = \zeta^3$   
 (3)  $\sigma(\zeta) = \zeta^2$  (4)  $\sigma(\zeta) = \alpha$

21. निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय अगणनीय है ?

- (1)  $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$  (2)  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$   
 (3)  $[0,1] / \left\{ \frac{2}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$  (4)  $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\}$

22.  $\mathbf{R}^2$  के निम्नलिखित उपसमुच्चयों में से कौन-सा उपसमुच्चय सघन है ?

- (1)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 1\}$  (2)  $\left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \right\}$   
 (3)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$  (4)  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 5 < x^2 + y^2 < 6\}$



23. मान लीजिए कि  $F_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$  अंतराल हैं। तब,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  :

- (1) संवृत समुच्चय है (2) विवृत समुच्चय है  
(3) रिक्त समुच्चय है (4) अर्ध-विवृत समुच्चय है

24. मान लीजिए कि  $d_1, d_2$  और  $d_3$  किसी समुच्चय  $X$  पर, जिसमें न्यूनतम दो अवयव हैं, आव्यूह हैं। तब, निम्नलिखित में से कौन  $X$  पर एक आव्यूह नहीं है ?

- (1)  $\min\{d_1, 2\}$  (2)  $\max\{d_2, 2\}$   
(3)  $\frac{d_3}{1+d_3}$  (4)  $\frac{d_1+d_2+d_3}{3}$

25. श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$  :

- (1) अभिसारी है, परन्तु निरपेक्षतः नहीं (2) निरपेक्षतः अभिसारी है।  
(3) अपसारी है। (4) इनमें से कोई भी नहीं

26. मान लीजिए कि :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^4}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

है। तब निम्न में से कौन-सा कथन सत्य है ?

- (1)  $(0, 0)$  पर  $f(x, y)$  असंतत है। (2)  $f_x(0, 0) = 1$  है।  
(3)  $(0, 0)$  पर  $f(x, y)$  संतत है। (4)  $f_y(0, 0)$  का अस्तित्व नहीं है।

27. समुच्चय  $A = \{x^3 - 1 : 1 \leq x \leq 2\} \cup [4, 5)$  का बाहरी माप है :

- (1) 2 (2) 5  
(3) 3 (4) 4

28. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

- (1) सघन समुच्चयों का स्वेच्छ सम्मिलन सघन होता है।
- (2) किसी समुच्चय  $X$  का एक उपसमुच्चय, जो  $X$  पर एक आव्यूह के सापेक्ष विवृत है,  $X$  पर प्रत्येक अन्य आव्यूह के सापेक्ष विवृत होगा।
- (3) यदि  $f(x) = x^2 + 4x + e^x$  द्वारा दिया जाने वाला  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  कोई फलन है तथा  $A$  अंतराल  $(0, 5)$  है, तो  $f(a)$  सहयोजित (संयोजित) होता है।
- (4) लिबेग बाहरी माप का प्रान्त परिमेय संख्याओं का घात समुच्चय है।

29.  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$  द्वारा दिए जाने वाले फलन  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  का स्थिर (स्तंभ) बिन्दु है :

- (1)  $(0, 0)$
- (2)  $(2, 2)$
- (3)  $(1, 1)$
- (4)  $(1, -1)$

30. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन असत्य है ?

- (1) यदि  $X$  एक नॉर्मर्ड रैखिक समष्टि है,  $x, y \in X$  है, तथा  $\|x\| = 1 = \|y\|$  है, तो  $\|x + y\| < 2$  है।
- (2) समष्टि  $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$  स्वतुल्य नहीं है।
- (3)  $A(z_1, z_2) = (z_1, -z_2)$  द्वारा दिए जाने वाला रैखिक संकारक  $A: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^2$  एक प्रसामान्य संकारक है।
- (4) प्रत्येक 1-विमोय बनाक समष्टि एक हिलबर्ट समष्टि होती है।

31. निम्नलिखित फलन पर विचार कीजिए :

$$f(x) = |\cos x| + |\sin(2 - x)|$$

निम्नलिखित में से किस समुच्चय पर,  $f$  अवकलनीय नहीं है ?

- (1)  $\{n\pi : n \in \mathbf{Z}\}$
- (2)  $\left\{\frac{n\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\right\}$
- (3)  $\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in \mathbf{Z}\right\}$
- (4)  $\left\{\frac{n\pi}{2} + 4 : n \in \mathbf{Z}\right\}$

32. निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय  $\mathbf{R}$  का एक सहयोजित (संयोजित) उपसमुच्चय नहीं है ?

(1)  $[0,4] \cup [3,5]$

(2) केन्द्र  $O$  और त्रिज्या  $\frac{1}{2}$  की एक विवृत बॉल (गेंद)  $B \left(0, \frac{1}{2}\right)$

(3) अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय

(4)  $f(x,y) = x^2 + y^2$  द्वारा दिए जाने वाले फलन  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  अंतर्गत  $\mathbf{R}^2$  में किसी सहयोजित (संयोजित) समुच्चय का प्रतिबिंब

33.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(1)  $(0,0)$  के बराबर है।

(2) का अस्तित्व नहीं है।

(3)  $(1,1)$  के बराबर है।

(4) उपर्युक्त में से कोई भी नहीं है।

34. यदि  $f(z)$  और  $g(z)$  दो शून्येतर बहुपद हैं, तो  $f(z)\overline{g(z)}$  वैश्लेषिक है यदि और केवल यदि :

(1)  $g\sqrt{\overline{z}}g(z)$  अचर है।

(2)  $f(z)$  अचर है।

(3)  $f(z)g(z)$  अचर है।

(4)  $g(z)$  अचर है।

35. निम्नलिखित में से कौन-से फलन संपूर्ण फलन  $f$  हैं तथा जिनके सभी  $k \in \mathbf{Z}$  के लिए  $z = ik$  पर साधारण (सरल) शून्यक हैं ?

(1)  $f(z) = a \sin 2\pi iz$  किसी  $a \in \mathbf{C}$  के लिए।

(2)  $f(z) = e^{bz}$ , किसी  $b \in \mathbf{C}$  के लिए

(3)  $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$

(4) उपर्युक्त में से कोई भी नहीं

36. मान लीजिए कि  $f(x, y) = (x + y, xy)$  द्वारा दिए जाने वाला फलन  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  है। तब, निम्नलिखित में से कौन-सा कथन असत्य है ?

- (1)  $f$  आच्छादक नहीं है।
- (2)  $(0, 0)$  पर  $f$  अवकलनीय नहीं है।
- (3)  $f$  के अंतर्गत  $\mathbf{R}^2$  में प्रत्येक बिन्दु के प्रतिलोम प्रतिबिंब में अधिकतम दो अवयव हैं।
- (4) समुच्चय  $y = x$  को छोड़कर, अन्य किसी पर  $f$  का अवकलज व्युत्क्रमणीय नहीं है।

37. संख्या  $\sqrt{3}e^{i\pi}$  :

- (1) अधिकल्पित संख्या है।
- (2) परिमेय संख्या है।
- (3) अपरिमेय संख्या है।
- (4) अबीजीय संख्या है।

38. मान लीजिए कि  $\{a_n\}$  और  $\{b_n\}$  वास्तविक संख्याओं के अनुक्रम हैं, जो  $|a_n| \leq |b_n|$  को संतुष्ट करते हैं। तब, निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

- (1)  $\sum a_n$  अभिसारी है, जबकि  $\sum b_n$  अभिसारी है।
- (2)  $\sum a_n$  निरपेक्षतः अभिसारी है, जब भी  $\sum b_n$  निरपेक्षतः अभिसारी है।
- (3)  $\sum b_n$  निरपेक्षतः अभिसारी है, जब भी  $\sum a_n$  निरपेक्षतः अभिसारी है।
- (4)  $\sum b_n$  अभिसारी है, जब भी  $\sum a_n$  अभिसारी है।

39. मान लीजिए कि  $\{f_n\}$  एक अंतराल  $[a, b]$  पर परिभाषित समाकलनीय फलनों का एक अनुक्रम है। तब, निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

- (1) यदि  $f_n \rightarrow 0$  और  $f'_n$  एकसमानतः परिबद्ध हैं, तो  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0$  है।
- (2) यदि  $f_n \rightarrow 0$  है, तो  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0$  है।
- (3) यदि  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0$  है, तो  $f_n(x) \rightarrow 0$  है।
- (4) यदि  $f_n(x) \rightarrow 0$  है तथा प्रत्येक  $f_n$  परिबद्ध है, तो  $\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0$  है।

40.  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  को  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{यदि } x < 0 \\ x^2 + 2x, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$  द्वारा परिभाषित कीजिए।

तब, निम्नलिखित में से कौन-सा कथन असत्य है ?

- (1)  $f''(0)$  का अस्तित्व नहीं है।
- (2)  $f'(0)$  का अस्तित्व नहीं है।
- (3) प्रत्येक  $x \neq 0$  के लिए,  $f'(x)$  का अस्तित्व है।
- (4) सभी  $x \in \mathbf{R}$  के लिए  $f''(x) = 2$  है।

41. अवकल समीकरण  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = f(x), x \in (-\infty, \infty)$  जहाँ  $f$  अंतराल  $(-\infty, \infty)$  पर एक संतत वास्तविक-मान फलन है, का व्यापक हल (जहाँ  $A, B, C$  और  $k$  स्वेच्छ अचर हैं) निम्न है :

- (1)  $y(x) = A \cos x + B \sin x + \int_0^x f(x) \sin(x-t) dt$
- (2)  $y(x) = \cos(x+k) + C \int_0^{x^0} f(t) \sin(x-t) dt$
- (3)  $y(x) = A \cos x + B \sin x + \int_0^x f(x-t) \sin t dt$
- (4)  $y(x) = A \cos x + B \sin x + \int_0^x f(x+t) \cos t dt$

42. प्रारंभिक मान समस्या (IVP)

$$\frac{dy}{dx} = y^2, y(0) = 1, (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$$

पर विचार कीजिए। तब, इस IVP के एक अद्वितीय हल का निम्नलिखित पर अस्तित्व है :

- (1)  $(-\infty, \infty)$
- (2)  $(-\infty, 1)$
- (3)  $(-2, 2)$
- (4)  $(-1, \infty)$

43. मान लीजिए कि : ODE  $u''(t) - 4u'(t) + 3u(t) = 0, t \in \mathbf{R}$  के सभी परिबद्ध हलों का समुच्चय  $V$  है। तब,  $V$  :

- (1) विमा 2 की एक सदिश समष्टि है।
- (2) विमा 1 की एक सदिश समष्टि है।
- (3) में केवल तुच्छ फलन  $u \equiv 0$  अंतर्विष्ट है।
- (4) में ठीक दो फलन अंतर्विष्ट हैं।

44. द्वितीय कोटि PDE  $u_{yy} - yu_{xx} + x^3u = 0$  :

- (1) सभी  $x \in \mathbf{R}$  और  $y \in \mathbf{R}$  के लिए, दीर्घवृत्तीय है।
- (2) सभी  $x \in \mathbf{R}$  और  $y \in \mathbf{R}$  के लिए, परवलयो है।
- (3) सभी  $x \in \mathbf{R}$  और  $y \in \mathbf{R}$  के लिए दीर्घवृत्तीय है।
- (4) सभी  $x \in \mathbf{R}$  और  $y < 0$  के लिए अतिपरवलयो है।

45.  $u = xy + f(x^2 - y^2)$  द्वारा दिए जाने वाला पृष्ठों का कुल, जहाँ  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  एक अवकलनीय फलन है, निम्न को संतुष्ट करता है :

- (1)  $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$
- (2)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$
- (3)  $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2$
- (4)  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - y^2$

46. मान लीजिए कि  $y: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  अवकलनीय है तथा निम्न ODE को संतुष्ट करता है :

$$\frac{dy}{dx} = f(y), x \in \mathbf{R}, y(0) = y(1) = 0$$

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  एक लिप्सशिज संतत फलन है। तब,

- (1)  $y(x) = 0$  है यदि और केवल यदि  $x \in \{0,1\}$  है।
- (2)  $y$  परिबद्ध है।
- (3)  $y$  निरंतर वर्धमान है।
- (4)  $\frac{dy}{dx}$  अपरिबद्ध है।

47. मान लीजिए कि  $v(0) = 1$  के साथ  $u(x,t) = e^{iwx}v(t)$  समीकरण  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$  का एक हल है,

तब :

- (1)  $u(x,t) = e^{iw(x-w^2t)}$
- (2)  $u(x,t) = e^{iwx(x-w^2t)}$
- (3)  $u(x,t) = e^{iw(x+w^2t)}$
- (4)  $u(x,t) = e^{iw^3(x-t)}$

48. PDE  $up^2 + q^2 + x + y = 0$ ;  $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial u}{\partial y}$  के लिए चारपिट-समीकरण निम्न द्वारा दिए जाते हैं :

$$(1) \frac{dx}{-1-p^3} = \frac{dy}{-1-qp^2} = \frac{du}{2P^2u+2q^2} = \frac{dp}{2pu} = \frac{dq}{2q}$$

$$(2) \frac{dx}{2pu} = \frac{dy}{2q} = \frac{du}{2p_u^2+2q^2} = \frac{dp}{-1-p^3} = \frac{dq}{-1-qp^2}$$

$$(3) \frac{dx}{up^2} = \frac{dy}{q^2} = \frac{du}{0} = \frac{dp}{x} = \frac{dq}{y}$$

$$(4) \frac{dx}{2q} = \frac{dy}{2pu} = \frac{du}{x+y} = \frac{dp}{p^2} = \frac{dq}{4p^2}$$

49.  $\mathbf{R}^2$  में ODE :  $\frac{dy}{dt} = AY$ ,  $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $t > 0$  के निकाय पर विचार कीजिए, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ है और } Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \text{ है। तब, :}$$

- (1)  $t > 0$  के लिए  $y_1(t)$  और  $y_2(t)$  एकदिष्टीय वर्धमान हैं।
- (2)  $t > 1$  के लिए  $y_1(t)$  और  $y_2(t)$  एकदिष्टीय वर्धमान हैं।
- (3)  $t > 1$  के लिए  $y_1(t)$  और  $y_2(t)$  एकदिष्टीय हासमान हैं।
- (4)  $t > 0$  के लिए  $y_1(t)$  और  $y_2(t)$  एकदिष्टीय हासमान हैं।

50.  $\mathbf{R}$  पर ODE :  $y'(x) = f(y(x))$  पर विचार कीजिए। यदि  $f$  एक सम फलन है तथा  $y$  एक विषम फलन है, तो :

- (1)  $-y(-x)$  भी एक हल है।
- (2)  $y(-x)$  भी एक हल है।
- (3)  $-y(x)$  भी एक हल है।
- (4)  $y(x)y(-x)$  भी एक हल है।

51. पानी से भरी हुई एक टंकी को प्रत्येक दिन उसमें से आधा पानी निकालकर खाली किया जाना है। कितने दिन बाद उस टंकी में 10% के निकटतम पानी शेष रह जाएगा ?

- (1) एक
- (2) दो
- (3) तीन
- (4) चार

52. 7 : 35 पर घड़ी की मिनट और घण्टे की सुइयों के बीच क्या कोण बनता है ?
- (1)  $10^\circ$  (2)  $17.5^\circ$   
(3)  $19.5^\circ$  (4)  $21^\circ$
53. मान लीजिए कि आप गुणनफल  $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \dots (x_{10} + y_{10})$  को प्रसारित रूप में लिखते हैं। कितने पदों में केवल एक  $x$  होगा और शेष  $y$  होंगे ?
- (1) 0 (2) 1  
(3) 5 (4) 10
54. यदि  $n$  एक प्राकृत संख्या है तथा  $n^5$  विषम है, तो निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?
- (1)  $n$  विषम है। (2)  $n+1$  विषम है।  
(3)  $n^2$  सम है। (4)  $n^4$  सम है।
55. एक भाग्यशाली व्यक्ति को सोने के सिक्कों के 6 घड़े प्राप्त हो जाते हैं। वह प्रथम चार घड़ों में गिनने पर सिक्कों की संख्या क्रमशः 60, 30, 20 और 15 ज्ञात करता है। यदि इनमें एक निश्चित श्रेणी बनती है, तो अगले दो घड़ों में सिक्कों की संख्याएँ क्या होंगी ?
- (1) 4 और 2 (2) 10 और 5  
(3) 12 और 10 (4) 14 और 8
56. 15m लम्बे एक लकड़ी के लट्ठे का एकसमान व्यास 2m है।  $11\text{m}^3$  आयतन का एक टुकड़ा प्राप्त करने के लिए, इसे लट्ठे की कितनी लम्बाई को काटा जाना चाहिए ?
- (1) 2.5 m (2) 3.5 m  
(3) 7 m (4) 14 m
57.  $x^2 + ax + b = 0$  के रूप की एक द्विघात समीकरण को हल करने में एक विद्यार्थी ने  $a$  का गलत मान लेकर मूल 6 और 2 प्राप्त किए, जबकि एक अन्य विद्यार्थी ने  $b$  का गलत मान लेकर मूल 6 और 1 प्राप्त किए।  $a$  और  $b$  के क्रमशः सही मान क्या हैं ?
- (1) 6 और 7 (2) 6 और 12  
(3) 7 और -12 (4) -7 और 12



58. हम एक फलन  $f(N) = N$  के अंकों का योग के रूप में परिभाषित करते हैं, जबकि  $N$  को दशमलव संख्या के रूप में व्यक्त किया जाता है, उदाहरणार्थ  $f(125) = 1+2+5 = 8$  है।  $f(2^7 3^3 5^6)$  का मान है :
- (1) 7 (2) 8  
(3) 9 (4) 10
59. प्रथम  $n$  प्राकृत संख्याओं का योग 42 है, जबकि इनमें से एक संख्या लुप्त है। लुप्त संख्या क्या है ?
- (1) 2 (2) 3  
(3) 4 (4) 5
60. निम्नलिखित अनुक्रम में, अगला पद क्या है ?
- 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, .....
- (1) 31 (2) 33  
(3) 35 (4) 37
61. यदि श्रेणी 3, 4, 7, 12, 13, 16, 21, ..... आगे जारी रहती है, तो निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या इस श्रेणी का पद नहीं होगी ?
- (1) 25 (2) 30  
(3) 32 (4) 39
62. द्विआधारी संख्या 111001 की दशमलव समतुल्य संख्या है :
- (1) 51 (2) 53  
(3) 55 (4) 57
63. विशिष्ट उदाहरणों के माध्यम से निष्कर्ष का व्यापीकरण होता है :
- (1) आगमनिक अभिगम (विधि) (2) निगमनिक अभिगम (विधि)  
(3) सैद्धांतिक अभिगम (विधि) (4) वैज्ञानिक अभिगम (विधि)
64. यदि किसी माह का चौथा शनिवार 22वाँ दिन है, तो उस माह के 13वें दिन क्या वार होगा ?
- (1) मंगलवार (2) बुधवार  
(3) बृहस्पतिवार (4) शुक्रवार

65. निम्नलिखित श्रेणी में लुप्त संख्या क्या है ?

1, 1, 4, 8, 9, 27, 16 ?

- (1) 32 (2) 64  
(3) 81 (4) 256

66. अनुक्रम C - 3, E - 6, G - 2, I - 24, K - 48, ..... में अगला युग्म ज्ञात कीजिए :

- (1) S-48 (2) M-96  
(3) L-96 (4) D-48

67. COLD : FSQJ :: HEAT : ?

- (1) XJFY (2) KIGZ  
(3) KIFZ (4) YIGY

68. असंगत संख्या युग्म ज्ञात कीजिए :

- (1) 1 : 2 (2) 2 : 9  
(3) 3 : 28 (4) 4 : 64

69. निम्नलिखित को पढ़िए तथा नीचे दिए प्रश्न का उत्तर दीजिए :

- (I) बिन्दु B बिन्दु A के उत्तर की ओर 4 m की दूरी पर है।  
(II) बिन्दु E बिन्दु B के पूर्व की ओर 8 m की दूरी पर है।  
(III) बिन्दु C बिन्दु A के पूर्व की ओर 5 m की दूरी पर है।  
(IV) बिन्दु D बिन्दु C के पश्चिम की ओर 9 m की दूरी पर है।

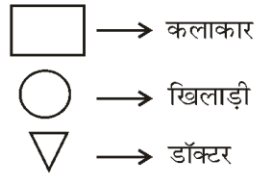
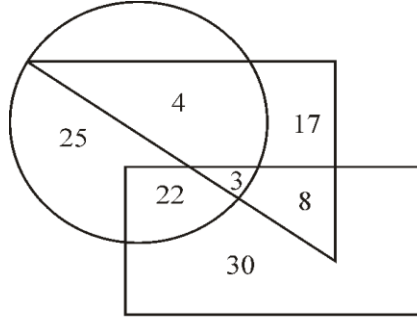
बिन्दु A से बिन्दु D तक पहुँचने के लिए, किसी व्यक्ति को कितनी दूरी चलनी चाहिए ?

- (1) 4 m (2) 9 m  
(3) 5 m (4) 14 m

70. 1 और 100 के बीच कितनी संख्याएँ हैं जो 3 और 5 से विभाज्य नहीं हैं ?

- (1) 47 (2) 43  
(3) 53 (4) 58

प्रश्न 71-75 : नीचे दिए आरेख का अध्ययन कीजिए तथा आगे आने वाले प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दीजिए :



71. कितने डॉक्टर न तो कलाकार हैं और न ही खिलाड़ी हैं ?

- (1) 17 (2) 5  
(3) 10 (4) 30

72. कितने डॉक्टर खिलाड़ी और कलाकार दोनों हैं ?

- (1) 22 (2) 8  
(3) 3 (4) 30

73. कितने कलाकार खिलाड़ी हैं ?

- (1) 5 (2) 8  
(3) 25 (4) 16

74. कितने खिलाड़ी न तो कलाकार हैं और न ही डॉक्टर हैं ?

- (1) 25 (2) 17  
(3) 5 (4) 10

75. कितने कलाकार न तो खिलाड़ी हैं और न ही डॉक्टर हैं ?

- (1) 10 (2) 17  
(3) 30 (4) 15

76.  $x^{451} + y^{451}$  सदैव निम्नलिखित स विभाज्य है :

- (1)  $x - y$  (2)  $x + y$   
(3)  $x^2 + y^2$  (4) इनमें से कोई नहीं

77.  $1!+2!+3!+4!+\dots\dots\dots+20!$  को 6 से विभाजित करने पर शेषफल है :
- (1) 0 (2) 1  
(3) 2 (4) 3
78. दो पासों को फेंका जाता है। उन पर प्राप्त संख्याओं का योग एक अभाज्य संख्या होने की प्रायिकता है :
- (1)  $\frac{5}{12}$  (2)  $\frac{1}{6}$   
(3)  $\frac{1}{2}$  (4)  $\frac{7}{9}$
79. मान लीजिए कि  $p(n)$  कथन " $n^2+n$  विषम है" को व्यक्त करता है। साथ ही, यदि  $P(n)=P(n+1)$  है, तो  $p(n)$  निम्न सभी के लिए सत्य होगा :
- (1)  $n > 1$  (2)  $n$   
(3)  $n > 2$  (4) इनमें से कोई नहीं
80. सभी  $n \in \mathbf{N}$  के लिए  $(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)$  को विभाजित करने वाला महत्तम धनात्मक पूर्णांक है :
- (1) 6 (2) 24  
(3) 60 (4) 120
81. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन  $(p \wedge q) \rightarrow \sim r$  के तार्किक रूप से समतुल्य है ?
- (1)  $(p \wedge q) \vee \sim r$  (2)  $\sim(p \wedge q \wedge r)$   
(3)  $\sim r \rightarrow (p \wedge q)$  (4)  $\sim(p \wedge q) \vee r$
82. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन एक सर्वसत्य कथन है ?
- (1)  $(p \rightarrow q) \rightarrow p$  (2)  $(p \wedge q) \rightarrow \sim q$   
(3)  $p \rightarrow \sim(p \wedge q)$  (4)  $p \vee q \rightarrow q$
83. कथन "किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं के बीच एक परिमेय संख्या का अस्तित्व है" का प्रतीकात्मक रूप है :
- (1)  $\forall p \in \mathbf{R}, \forall q \in \mathbf{R} \exists r \in \mathbf{Q} \text{ s. t. } p < r < q$   
(2)  $\forall p, q \in \mathbf{R}, p < q \exists r \in \mathbf{Q} \text{ s. t. } p < r < q$   
(3)  $\forall r \in \mathbf{Q} \exists p, q \in \mathbf{R} \text{ s. t. } p < r < q$   
(4)  $\exists p, q, r \in \mathbf{R} \text{ s. t. } p < q < r$

84. कथन “ $m, n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow m^2 - n^2 \neq 1$ .” की निम्नलिखित उपपत्ति पर विचार कीजिए :

उत्पत्ति मान लीजिए कि  $m^2 - n^2 = 1$  है। तब,  $(m-n)(m+n) = 1$  है। इसका निहितार्थ  $m-n = m+n$  है, तथा इसीलिए  $n = 0$  है। यह संभव नहीं है। इसलिए  $m^2 - n^2 \neq 1$  है।

ऊपर दी गई उपपत्ति निम्नलिखित का एक उदाहरण है :

- |                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| (1) आगमन द्वारा उपपत्ति       | (2) प्रतिउदाहरण द्वारा उपपत्ति |
| (3) अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति | (4) प्रत्यक्ष उपपत्ति          |

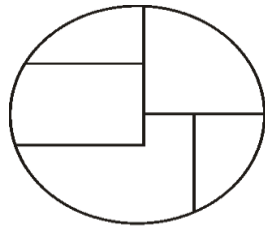
85. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है ?

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 > x$            | (2) $\exists x \in \mathbf{R}$ s. t. $x^2 - 2 = 1$                            |
| (3) $\exists x \in \mathbf{R}$ s. t. $x^2 + 2 = 1$ | (4) $\exists x \in \mathbf{R} \exists y \in \mathbf{R}$ s. t. $x^2 + y^2 = 4$ |

86. निम्नलिखित में से कौन कथन “यदि  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  वास्तविक संख्याओं का एक वर्धमान अनुक्रम है, तो कोई  $a_n$  धनात्मक होना चाहिए” का एक प्रतिउदाहरण है ?

- |   |   |
|---|---|
| (1) $\left(-\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbf{N}}$  | (2) $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$            |
| (3) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ | (4) $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ |

87. निम्नलिखित वृत्त के क्षेत्रों को रंगने के लिए न्यूनतम कितने रंगों की आवश्यकता होगी कि परिसीमा, साझा करने वाले क्षेत्र समान रंग में न हो ?



- |       |       |
|-------|-------|
| (1) 2 | (2) 3 |
| (3) 4 | (4) 5 |

88. निम्न कथनों पर विचार कीजिए :

A = सभी अच्छे नागरिकों का समुच्चय

B = सभी परोपकारी व्यक्तियों का समुच्चय

C = सभी सभ्य व्यक्तियों का समुच्चय

तब, निम्नलिखित में से कौन-सा संबंध, कथन “प्रत्येक व्यक्ति जो परोपकारी और सभ्य होता है एक अच्छा नागरिक होता है” को निरूपित करता है ?

(1)  $A \subseteq B \cap C$

(2)  $A \setminus B \supseteq C$

(3)  $B \cup C \supseteq A$

(4)  $B \cap C \subseteq A$

89. यह परिकल्पना करते हुए कि फलन  $\mathbf{R}$  और  $\mathbf{Z}$  तक परिभाषित है, निम्नलिखित में से कौन-सा फलन आच्छादक नहीं है ?

(1)  $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(2)  $f(x) = x + 1$

(3)  $f(x) = x^2 + 1$

(4)  $f(x) = |x|$

90. निम्नलिखित में से कौन-से कथन को आगमन के सिद्धान्त द्वारा सिद्ध नहीं किया जा सकता है ?

(1) एक उत्तल  $n$ -भुज के सभी अंतः कोणों का योग  $180^\circ(n-2)$  होता है।

(2)  $\forall x, y \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, x^n \cdot y^n = (xy)^n$  है।

(3)  $\mathbf{N}$  का प्रत्येक उपसमुच्चय गणनीय होता है।

(4)  $n$  अवयवों वाले एक समुच्चय के घात समुच्चय का गुणनांक  $2^n$  होता है।

91. निम्न कथन पर विचार कीजिए :

“36 व्यक्तियों के एक समूह में, ऐसे 6 व्यक्ति अवश्य होते हैं जिनके जन्मदिन सप्ताह के एक ही दिन पड़ते हैं।” इसको सिद्ध करने के लिए, निम्नलिखित में से कौन-सी विधि उपयोग की जाती है ?

(1) अंतःविरोध

(2) कोष्ठ नियम

(3) दोनों (1) और (2)

(4) इनमें से कोई नहीं

92. 100 व्यक्तियों का उनकी फिल्मों की रुचि के बारे में सर्वे किया गया। यह पाया गया कि 20 व्यक्ति रोमांचक फिल्मों पसंद करते हैं, 48 प्रणय-संबंधी तथा 32 हास्यप्रद फिल्मों पसंद करते हैं। आगे, 15 व्यक्ति रोमांचक और प्रणय-संबंधी और हास्यप्रद फिल्मों पसंद करते हैं तथा 8 व्यक्ति हास्य प्रद और रोमांचक दोनों प्रकार की फिल्मों पसंद करते हैं। यह भी पाया गया कि 15 व्यक्ति इन तीनों में से किसी प्रकार की फिल्म पसंद नहीं करते हैं। कितने व्यक्ति तीनों प्रकार की फिल्मों पसंद करते हैं ?

- (1) 18 (2) 15  
(3) 28 (4) 12

93. मान लीजिए कि A, B और C तीन व्यक्ति हैं। A कहता है कि B झूठा है। B कहता है कि C झूठा है। C कहता है कि A और B दोनों झूठे हैं। इनमें से कौन सत्य बोल रहा है ?

- (1) A (2) B  
(3) C (4) इनमें से कोई नहीं

94. 5 पुरुष और 6 महिलाओं में से 5 सदस्यों की एक कमेटी बनाई जानी है। यदि इसमें 2 पुरुष और 3 महिलाएँ ली जाती हैं, तो यह कमेटी कितनी विधियों से बनाई जा सकती है ?

- (1) 120 (2) 180  
(3) 30 (4) 200

95. निम्नलिखित आँकड़ों का भारित माध्य क्या है ?

$x$	भार
2	1
5	2
3	4
4	3
2	6
8	2

- (1) 4 (2) 3.56  
(3) 10.67 (4) 5.8

96. 12 संख्याओं का माध्य 48 है। एक संख्या को हटा देने पर, माध्य 45 रह जाता है। कौन-सी संख्या हटाई गई थी ?

- (1) 81 (2) 53  
(3) 28 (4) 76

97. यदि संख्याओं के किसी समुच्चय का माध्य 5 है और उनका मानक विचलन 6 है, तो इन संख्याओं के वर्गों का माध्य क्या है ?

- (1) 13 (2) 17  
(3) 61 (4) निर्धारित नहीं किया जा सकता है।

98. एक गणितीय कथन :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s. t. } |x - y| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$$

पर विचार कीजिए। इस कथन का निषेधन क्या है ?

- (1)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s. t. } |x - y| \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$   
(2)  $\nexists \varepsilon > 0, \delta > 0 \text{ s. t. } |x - y| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$   
(3)  $\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s. t. } |x - y| \geq \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$   
(4)  $\exists \varepsilon > 0 \text{ s. t. } \forall \delta > 0 \exists x, y \in \mathbf{R}, |x, y| \geq \varepsilon$

99. मान लीजिए कि S सभी शून्येतर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तथा S पर \* को सभी  $x, y \in S$  के लिए,  $x * y = x + y + 1$  के रूप में परिभाषित किया गया है। अब, निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :

I : \* के अंतर्गत S संवृत है।

II : एक  $x \in S$  का अस्तित्व है s.t सभी  $y \in S$  के लिए  $x * y = y$  है।

उपर्युक्त में से कौन-सा कथन सत्य है ?

- (1) केवल I (2) केवल II  
(3) दोनों I और II (4) इनमें से कोई नहीं

100. निम्नलिखित में से किस समुच्चय को दो समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है ?

- (1)  $\{(x, y) | 0 \leq y \leq 4\}$  (2)  $\{(x, y) | x > y\}$   
(3)  $\{(x, y) | x \in \mathbf{Q}, y \notin \mathbf{Q}\}$  (4)  $\{(x, y) | x \text{ सम पूर्णांक है, } y = 2x \text{ है}\}$



***Space for Rough Work***  
रफ़ कार्य के लिए